V K-VR

Def: [6.4.1] Eine <u>Bilinearform</u> auf V ist eine Abbildung

$$\beta: V \times V \longrightarrow K$$
$$(\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto \beta(\underline{v}, \underline{w}),$$

die in beiden Koordinaten linear ist:

$$V \longrightarrow K \qquad \text{linear}$$
$$\underline{v} \longmapsto \beta(\underline{v}, \underline{w}) \qquad \forall \underline{w} \in V$$

$$V \longrightarrow K \qquad \text{linear}$$
$$\underline{w} \longmapsto \beta(\underline{v}, \underline{w}) \qquad \forall \underline{v} \in V$$

$A \in M(n \times n; K)$ liefert Bilinearf.

$$\beta_A: K^n \times K^n \longrightarrow K$$
$$(\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto {}^t\underline{v} \cdot A \cdot \underline{w}$$

Bilinearform β auf K^n liefert

$$M(\beta) := \left(\beta(\underline{e}_i, \underline{e}_j)\right)_{ij} \in M(n \times n; K)$$

Satz: Obige Konstruktionen liefern zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Bilinearformen}\\ \text{auf } K^n\end{array}\right\} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} M(n\times n; K)$$

$$\begin{array}{ccc} \beta & \longmapsto & M(\beta) \\ \beta_A & \longleftarrow\!\shortmid & A \end{array}$$

Allgemeiner:

V VR mit Basis $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

β Bilinearform auf V

$$\begin{tikzcd}
K^n \times K^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}} \times \Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] \arrow[drr, dashed] & & \\
V \times V \arrow[rr, "\beta"'] & & V
\end{tikzcd}$$

Def: Darstellende Matrix von
[6.4.2] β bezüglich $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(\beta) := M\left(\beta \circ (\Phi_{\mathcal{B}} \times \Phi_{\mathcal{B}})\right)$$
$$= \left(\beta(b_i, b_j)\right)_{ij}$$

Satz: V n-dim. K-VR
[6.4.2] $\mathcal{B}$ Basis von V

Obige Konstruktion liefert Bijektion

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Bilinearformen} \\ \text{auf } V\end{array}\right\} \xleftrightarrow{\cong} M(n \times n; K)$$
$$\beta \longmapsto M_{\mathcal{B}}(\beta)$$

Def: $A, A' \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$
[fehlt]
kongruent, falls
invertierbare
$T \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$
existiert mit

$$A' = {}^t T \cdot A \cdot T$$

Satz: A, A' genau dann kongruent,
[6.4.3]
wenn sie bezüglich
möglicherweise verschiedener
Basen dieselbe Bilinearform darstellen.

$(\Leftrightarrow \exists \beta : V \times V \longrightarrow K$ Bilinearf.,
Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von V mit

$$A = M_{\mathcal{B}}(\beta)$$
$$A' = M_{\mathcal{B}'}(\beta)\,)$$

Def: Bilinearform β auf V ist
[6.4.1]

<u>symmetrisch</u>, falls
$$\beta(\underline{v}, \underline{w}) = \beta(\underline{w}, \underline{v})$$
<u>schiefsymmetrisch</u>, falls
$$\beta(\underline{v}, \underline{w}) = -\beta(\underline{w}, \underline{v})$$
<u>alternierend</u>, falls
$$\beta(\underline{v}, \underline{v}) = 0$$
(jeweils $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$)

Notiz:

alternierend $\Rightarrow$ schief-symmetrisch

Falls $1+1 \neq 0$ in K:

alternierend $\Leftrightarrow$ schief-symmetrisch

Satz: Für Bilinearform β auf V, beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V und $M := M_{\mathcal{B}}(\beta)$ gilt: [6.42]

β symmetrisch $\iff$ ${}^tM = M$

β schiefsym. $\iff$ ${}^tM = -M$

β alternierend $\iff$ $\left({}^tM = -M \text{ und } M_{ii} = 0 \ \forall i \right)$

„M ist (schief-) symmetrisch"

Variation: $\underbrace{\text{Sesqui}}_{1\frac{1}{2}}$linearformen

$\boxed{K = \mathbb{C}}$

Def: Eine <u>Sesquilinearform</u> η auf
[6.5.1] einem $\mathbb{C}$-VR V ist eine Abbildung

$$\eta : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$ die

(i) in der ersten Koordinate linear ist:

$$\eta(\underline{v} + \underline{v}', \underline{w}) = \eta(\underline{v}, \underline{w}) + \eta(\underline{v}', \underline{w})$$

$$\eta(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \eta(\underline{v}, \underline{w})$$

$$\forall \underline{v}, \underline{v}', \underline{w} \in V, \ \lambda \in \mathbb{C}$$

(ii) in der zweiten Koordinate semi-linear ist:

$$\eta(\underline{v}, \underline{w} + \underline{w}') = \eta(\underline{v}, \underline{w}) + \eta(\underline{v}, \underline{w}')$$

$$\eta(\underline{v}, \lambda \cdot \underline{w}) = \overline{\lambda} \eta(\underline{v}, \underline{w})$$

komplexe Konjugation

$\forall \underline{v}, \underline{v}', \underline{w} \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Sie ist hermitesch, wenn ferner gilt:

(iii) $\eta(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\eta(\underline{w}, \underline{v})}$

Satz: Wir haben zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Sesquilinear-}\\ \text{formen auf } \mathbb{C}^n\end{array}\right\} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} M(n \times n; \mathbb{C})$$

$$\eta \longmapsto M(\eta)$$

$$\eta_A \longleftarrow A$$

$$M(\eta) := \left(\eta(\underline{e}_i, \underline{e}_j)\right)_{ij}$$

$$\eta_A(\underline{v}, \underline{w}) := {}^t\underline{v} \cdot A \cdot \overline{\underline{w}}$$

$\square$

Satz [6.5.7]:

η hermitesch $\iff$ ${}^t\overline{M}(\eta) = M(\eta)$

$\square$